

19. 【解】(1) 由题意知, $1, c(c \geq 1)$ 是方程 $bx^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根, 由 $b - 3 + 2 = 0$, 得 $b = 1$, 由 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 得 $x < 1$ 或 $x > 2$, 则 $c = 2$. 故 $b = 1, c = 2$.

(2) 原不等式可化为 $ax^2 - (2a+1)x + 2 < 0 \Rightarrow (ax-1)(x-2) < 0$.

若 $a = 0$, 则 $-x + 2 < 0$, 解得 $x > 2$.

若 $a < 0$, 则 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) > 0$, 解得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 2$.

若 $a > 0$, 则 $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$,

当 $\frac{1}{a} < 2$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 解得 $\frac{1}{a} < x < 2$;

当 $\frac{1}{a} = 2$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $\frac{1}{a} > 2$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 解得 $2 < x < \frac{1}{a}$.

综上所述, 当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 2\right\}$;

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x > 2\}$;

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid 2 < x < \frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 2\right\}$.

(3) 问题转化为 $(m+1)x^2 - (m-1)x + m - 1 \geq 0$ 对一切 $-\frac{1}{2} \leq$

$x \leq \frac{1}{2}$ 恒成立,

所以 $m(x^2 - x + 1) + x^2 + x - 1 \geq 0 \Rightarrow m(x^2 - x + 1) \geq -(x^2 + x - 1)$.

因为 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ 恒成立,

所以 $m \geq -\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$.

$-\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = -\frac{(x^2 - x + 1) + 2(x - 1)}{x^2 - x + 1} = -1 - \frac{2(x - 1)}{x^2 - x + 1}$,

设 $x - 1 = t$, 则 $x = t + 1 \left(-\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2}\right)$,

且 $-1 - \frac{2t}{(t+1)^2 - (t+1) + 1} = -1 - \frac{2t}{t^2 + t + 1} = -1 - \frac{2}{t + \frac{1}{t} + 1} =$

$-1 + \frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1}$,

因为 $-t + \frac{1}{-t} \geq 2\sqrt{-t \cdot \frac{1}{(-t)}} = 2$, 当且仅当 $t = -1$ 时取 "=",

所以 $-t + \frac{1}{-t} - 1 \geq 1$, 所以 $\frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1} \leq 2$, 所以 $-1 +$

$\frac{2}{-t + \frac{1}{-t} - 1} \leq 1$.

所以 $m \geq 1$, 故实数 m 的取值范围是 $\{m \mid m \geq 1\}$.

第三章 函数的概念与性质

3.1 函数的概念及其表示

3.1.1 函数的概念

基础必刷

1. D 【解析】对于 A, 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 与条件矛盾, A 错误;

对于 B, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, 1]$, 与条件矛盾, B 错误;

对于 C, 有一个自变量 x 对应两个 y 值的情况, 不是函数, 与条件矛盾, C 错误;

对于 D, 定义域为 $[-1, 0]$, 值域为 $[-1, 1]$, 符合条件, D 正确. 故选 D.

方法精练

判断函数图象需要注意以下几点

(1) 在定义域内每个 x 都要有对应的函数值 y ;

(2) 一个 x 不能对应多个 y , 即画一条与 x 轴垂直的直线, 直线与函数图象至多有一个交点;

(3) 函数值不能超出给定函数值的集合.

2. AD 【解析】对于 A, 由于实数包含所有的整数, 故 A 中的每个元素在 B 中都有唯一的元素与之对应, 符合函数的定义, 故 A 正确; 对于 B, 当在 A 中取非整数的元素时, 在集合 B

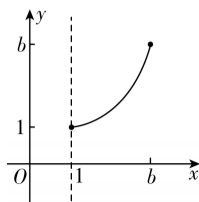
中没有元素与之对应, 不符合函数的定义, 故 B 错误; 对于 C, 若取 $4 \in A$, 又 $(\pm 2)^2 = 4$, 所以有两个 y 和一个 x 对应, 不符合函数的定义, 故 C 错误; 对于 D, 由图可知对于 A 中的所有元素, 在集合 B 中都有唯一的元素与之对应, 符合函数的定义, 故 D 正确. 故选 AD.

3. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} 2+x \geq 0, \\ 16-x^2 > 0, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq x < 4$, 故定义域为 $[-2, 4)$. 故选 C.

4. B 【解析】由函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a$, 可得其图象的对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a$ 的定义域和值域均为 $[1, b]$ ($b >$

1), 作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示,



$$\text{由图可知} \begin{cases} f(1)=1, \\ f(b)=b, \end{cases} \text{即} \begin{cases} \frac{1}{2}-1+a=1, \\ \frac{1}{2}b^2-b+a=b. \end{cases}$$

解得 $a=\frac{3}{2}, b=1$ 或 $b=3$. $\because b>1, \therefore b=3$. 故选 B.

高手视角 根据二次函数的性质, 结合定义域和值域均

为 $[1, b] (b>1)$, 列出相应方程组, 求出 a, b 的值即可.

5. C 【解析】对于 A, 函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 函数 $y=\frac{t+1}{t^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, 两个函数的定义域不同, 所以不是同一函数, 故 A 错误;

对于 B, 函数 $y=|x+1|+|x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$\text{函数 } y = \begin{cases} 2x+1, & x>0, \\ 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -2x-1, & x<-1 \end{cases} \text{ 的定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

两个函数的定义域不同, 所以不是同一函数, 故 B 错误;

对于 C, 函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{t^2}=|t|$, 两个函数的定义域与对应关系都相同, 所以两个函数是同一函数, 故 C 正确;

对于 D, 函数 $y=|x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 函数 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 两个函数的定义域不同, 所以不是同一函数, 故 D 错误. 故选 C.

6. ABD 【解析】对于 A, 对 $y=\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}$, 有 $\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases}$ 解

得 $-1 \leq x \leq 1$, 即定义域为 $[-1, 1]$,

对 $y=\sqrt{1-x^2}$, 有 $1-x^2 \geq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 1$, 即定义域为 $[-1, 1]$,

又 $y=\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}=\sqrt{1-x^2}$, 故 $y=\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}$ 与 $y=\sqrt{1-x^2}$ 表示同一个函数, 故 A 正确;

对于 B, 函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $(-1, 2)$, 即 $x \in (-1, 2)$, 则有 $2x-1 \in (-3, 3)$, 故 $-3<1-x<3$, 解得 $-2<x<4$, 故函数 $f(1-x)$ 的定义域为 $(-2, 4)$, 故 B 正确;

对于 C, 由 $x>3$, 得 $x-1>2$, 则 $y=2x+\frac{4}{x-1}-1=2(x-1)+\frac{4}{x-1}+1$, 令 $t=x-1>2$, 由于函数 $y=2t+\frac{4}{t} \geq 2 \times \sqrt{2t \cdot \frac{4}{t}}=4\sqrt{2}$, 当

且仅当 $2t=\frac{4}{t}$, 即 $t=\sqrt{2}$ 时取得等号, 又 $t>2$, 故取不到等号, 即函数 $y=2x+\frac{4}{x-1}-1$ 的最小值取不到 $4\sqrt{2}+1$, 故 C 错误;

对于 D, 令 $t=\sqrt{1-x} \geq 0$, 则 $x=1-t^2$,

故 $f(x)=x+2\sqrt{1-x}$ 可转化为 $y=1-t^2+2t=-(t-1)^2+2 \leq 2$,

当且仅当 $t=1$ 时, 等号成立, 故函数 $f(x)=x+2\sqrt{1-x}$ 的值域为 $(-\infty, 2]$, 故 D 正确.

故选 ABD.

7. $2\sqrt{3}-\frac{1}{4}$ 【解析】 $f(1)=\sqrt{1+8}-\frac{1}{1}=2$, 则 $f(f(1))=f(2)=$

$$\sqrt{2^2+8}-\frac{1}{2^2}=2\sqrt{3}-\frac{1}{4}.$$

8. $-\frac{11}{4}$ 【解析】由函数的解析式可得 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}+$

$$\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{x}{1-x}=-1, x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1,$$

$$\text{故 } f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)+f(3)+f(4)=-3, \text{ 且 } f(5)=$$

$$\frac{1}{5-1}=\frac{1}{4}, \text{ 故 } f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)+f(3)+f(4)+$$

$$f(5)=-3+\frac{1}{4}=-\frac{11}{4}.$$

易错专刷

易错点 1 不能正确理解函数的定义

9. C 【解析】集合 $P=\{x|0 \leq x \leq 4\}, Q=\{y|0 \leq y \leq 2\}$.

对于 A, $f: x \rightarrow y=\frac{1}{2}x$, 由 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq 2$, 故能构成从 P 到 Q 的函数, 选项 A 不符合题意;

对于 B, $f: x \rightarrow y=\sqrt{x}$, 由 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq 2$, 故能构成从 P 到 Q 的函数, 选项 B 不符合题意;

对于 C, $f: x \rightarrow y=\frac{2}{3}x$, 由 $x=4$, 可得 $y=\frac{8}{3}>2$, 故不能构成从 P 到 Q 的函数, 选项 C 符合题意;

对于 D, $f: x \rightarrow y=\frac{1}{8}x^2$, 由 $0 \leq x \leq 4$, 可得 $0 \leq y \leq 2$, 故能构成从 P 到 Q 的函数, 选项 D 不符合题意. 故选 C.

易错警示

判断两个集合 A, B 在对应关系 $f: A \rightarrow B$ 下能否构成函数, 主要是判断集合 A 中的每一个元素是否在集合 B 中有唯一确定的元素与之对应, 而对集合 B 中的元素没有特殊要求, 因此集合 B 与集合 A 都是非空实数集. $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 $y=f(x), x \in A$, 且函数 $f(x)$ 的值域是集合 B 的子集.

易错点 2 函数的定义域、值域必须是集合或区间的形式

10. $[2, 3) \cup (3, 4]$ 【解析】因为 $y=f(\sqrt{1-2x})$ 的定义域为 $[-4, 0]$, 所以 $x \in [-4, 0]$, $\sqrt{1-2x} \in [1, 3]$, 所以 $y=\frac{f(x-1)}{x-3}$

中有 $\begin{cases} 1 \leq x-1 \leq 3, \\ x-3 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $2 \leq x \leq 4$ 且 $x \neq 3$, 所以 $y=\frac{f(x-1)}{x-3}$ 的

定义域为 $[2, 3) \cup (3, 4]$.

11. $[2, +\infty)$ 【解析】函数 $y = \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $A = [1, +\infty)$, 函数 $y = x^2 + 2$ 的值域为 $B = [2, +\infty)$, 则 $A \cap B = [2, +\infty)$.

易错警示 由于函数的定义域、值域均为集合或区间的形式, 因此在填空题中, 必须将函数的定义域、值域写成集合或区间的形式, 否则是错误的.

易错点 3 正确理解同一个函数的概念

12. C 【解析】对于 A, $f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g(x) = |x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 它们的定义域相同, 但对应关系不同, 不是同一个函数;

对于 B, $f(x) = x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$, 它们的定义域不同, 不是同一个函数;

对于 C, $f(x) = |x - 2|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2, \\ 2 - x, & x < 2 \end{cases}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 它们的定义域相同, 且对应关系也相同, 故它们是同一个函数;

对于 D, $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $\{x | x \geq 1\}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ 的定义域为 $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$, 它们的定义域不同, 不是同一个函数. 故选 C.

易错警示 判断两个函数是不是同一个函数, 主要是判断两函数的定义域与对应关系是否相同, 只有当两函数的定义域相同、对应关系相同时, 函数的值域才相同, 两个函数才为同一个函数.

易错点 4 求函数定义域时, 非等价变形而致误

13. 【解】(1) $f(x)$ 的定义域满足 $\begin{cases} x+2 \neq 0, \\ -x^2 - 3x + 4 \geq 0, \\ |x+2| - 3 \neq 0, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} x \neq -2, \\ -4 \leq x \leq 1, \\ x \neq 1 \text{ 且 } x \neq -5, \end{cases} \quad \text{即得 } -4 \leq x < 1 \text{ 且 } x \neq -2,$$

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | -4 \leq x < -2 \text{ 或 } -2 < x < 1\}$.

$$(2) f(-1) = \frac{1 + \sqrt{6}}{-2} = -\frac{1 + \sqrt{6}}{2}.$$

易错警示 求函数的定义域时, 一定要根据函数解析式的特征列出满足题意的条件, 不要将函数解析式变形后求解, 如本题中, 若将函数解析式化简为 $f(x) = \frac{1 + \sqrt{-x^2 - 3x + 4}}{|x + 2| - 3}$, 就对函数解析式做了非等价变形, 会导致求解错误.

易错点 5 混淆函数的定义域与函数在某区间上有意义而致误

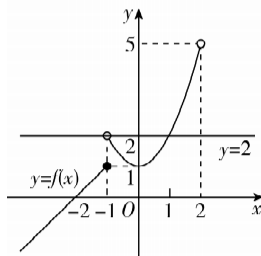
14. 【解】 $\because ax - 2 \geq 0, a > 0, \therefore x \geq \frac{2}{a}$, 即函数的定义域为 $[\frac{2}{a}, +\infty)$. 由函数在区间 $[1, +\infty)$ 上有意义, 得 $[1, +\infty) \subseteq [\frac{2}{a}, +\infty)$, 即 $\frac{2}{a} \leq 1$. 又 $a > 0, \therefore a \geq 2, \therefore$ 实数 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$.

易错警示 “函数在某区间 I 上有意义”与“函数的定义域是 I ”是不同的, 前者的区间 I 是函数定义域的子集, 而后的区间 I 就是函数的定义域. 另外如本题中, 求实数 a 的取值范围列不等式时, 不要忘记区间端点相等的情况.

3.1.2 函数的表示法

基础必刷

1. A 【解析】由题表知, $f(1) = 2, \therefore f(f(1)) = f(2) = -1$. 故选 A.
2. D 【解析】将容器看作一个球体, 在刚开始注水时, 由于球体的截面面积越来越大, 则对于相同时间的变化量, $f(t)$ 的变化越来越慢, 到水注入球体的一半时, 由于球体的截面面积较大, 则 $f(t)$ 的变化率较小, 达到了最小值, 在水接近于球体的顶端时, $f(t)$ 的变化率又较大. 故选 D.
3. BCD 【解析】A 选项, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 2)$, A 错误. B 选项, 当 $x \leq -1$ 时, $x + 2 \leq 1$, 当 $-1 < x < 2$ 时, $0 \leq x^2 < 4$, 则 $1 \leq x^2 + 1 < 5$, 所以 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 5)$, B 正确. C 选项, 由 B 选项的分析可知, 若 $f(x) = 3$, 则 $\begin{cases} -1 < x < 2, \\ x^2 + 1 = 3, \end{cases}$ 解得 $x = \sqrt{2}$, C 正确. D 选项, 画出 $f(x)$ 的图象如图, 由图可知, D 正确. 故选 BCD.



4. 12 【解析】令 $x = y = 1$, 则 $f(1+1) = f(1) + f(1) + 2 \times 1 \times 1$, $\therefore f(1) = 2, \therefore f(2) = 6$.
令 $x = 2, y = 1$, 则 $f(2+1) = f(2) + f(1) + 2 \times 2 \times 1$, $\therefore f(3) = 6 + 2 + 4 = 12$.

5. $\frac{1}{x-5} - 1$ (答案不唯一) 【解析】因为函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 值域为 $\{y | y \neq 0\}$, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{x-5} - 1$ 的定义

域为 $\{x|x \neq 5\}$, 值域为 $\{y|y \neq -1\}$, 故答案可以为 $\frac{1}{x-5}-1$ (答案不唯一).

6. 【解】(1) 由 $f(x)+3f(-x)=x^2-2x$, 用 $-x$ 代替 x 可得 $f(-x)+3f(x)=(-x)^2+2x$,

$$\text{联立方程} \begin{cases} f(x)+3f(-x)=x^2-2x, \\ f(-x)+3f(x)=(-x)^2+2x, \end{cases} \text{解得 } f(x)=\frac{1}{4}x^2+x.$$

❗逻辑: 将 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 看作变量, x 看作常数解二元一次方程组

(2) 函数 $f(x)$ 是二次函数, 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$,

$\because f(0)=1, \therefore c=1$, 又 $\because f(x+1)-f(x)=2x$,

$\therefore a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$,

整理得 $2ax+(a+b)=2x$,

由恒等式的性质知, 上式中对应项的系数相等,

$$\therefore \begin{cases} 2a=2, \\ a+b=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a=1, \\ b=-1, \end{cases} \therefore f(x)=x^2-x+1.$$

易错专刷

易错点 1 求函数解析式时忽视函数的定义域而致误

7. B 【解析】已知 $f(\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}-1$,

令 $t=\sqrt{x}-1(t \geq -1)$, 则 $\sqrt{x}=t+1, x=(t+1)^2$,

$\therefore f(t)=(t+1)^2-2(t+1)-1=t^2-2(t \geq -1)$,

$\therefore f(x)=x^2-2(x \geq -1)$. 故选 B.

8. $f(x)=x^2-x+3(x \neq 1)$ 【解析】令 $1+\frac{1}{x}=t$, 则 $\frac{1}{x}=t-1(t \neq$

$1)$, 所以 $f(t)=(t-1)^2+t-1+3=t^2-t+3(t \neq 1)$, 即

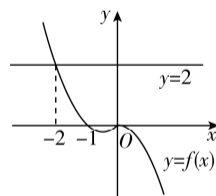
$f(x)=x^2-x+3(x \neq 1)$.

易错警示

已知函数 $y=f(g(x))$ 的解析式, 求函数 $y=f(x)$ 的解析式时, 若函数 $y=g(x)$ 的值域不是全体实数, 则所求得的函数 $y=f(x)$ 的解析式必须带有定义域 (即函数 $y=g(x)$ 的值域), 如 7 题中函数 $y=f(x)$ 的定义域就是 $y=\sqrt{x}-1$ 的值域, 而 8 题中, 若只将答案写成 $f(x)=x^2-x+3$, 也是错误的.

易错点 2 不能正确理解分段函数

9. $(-\infty, \sqrt{2}]$ 【解析】作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



由 $f(f(a)) \leq 2$ 可得 $f(a) \geq -2$,

当 $a < 0$ 时, $f(a)=a^2+a=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \geq -2$ 恒成立;

当 $a \geq 0$ 时, $f(a)=-a^2 \geq -2$, 解得 $0 \leq a \leq \sqrt{2}$.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, \sqrt{2}]$.

易错警示

(1) 求分段函数的函数值时, 要先确定要求值的自变量属于哪一区间, 然后代入该区间对应的解析式求值;

(2) 当自变量所在区间不确定时, 要分类讨论, 分类标准应参照分段函数不同段的自变量的取值范围.

3.2 函数的基本性质

3.2.1 单调性与最大(小)值

课时 1 函数的单调性

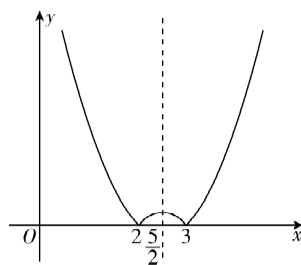
基础必刷

1. D 【解析】选项 A 中, “存在” 应为 “任意”, 故 A 错误; 选项 B 中, “无穷” 应为 “任意”, 故 B 错误; 选项 C 中, 在 $A \cup B$ 上不一定成立, 故 C 错误; 由函数单调性的定义知, 选项 D 正确.

2. C 【解析】因为函数 $y=x^2-5x+6$ 的图象的对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$, 由 $x^2-5x+6=0$ 可得 $x=2$ 或 $x=3$, 所以作出函数 $f(x)=|x^2-5x+6|$ 的图象如图所示.

由图可知, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 和 $(3, +\infty)$.

故选 C.



3. C 【解析】 $f(x)=|x+2|+x-3=\begin{cases} 2x-1, & x \geq -2, \\ -5, & x < -2, \end{cases}$

又 $f(a) > f(3-2a)$, 则有 $\begin{cases} a > 3-2a, \\ a > -2, \end{cases}$ 解得 $a > 1$, 故选 C.

4. A 【解析】当 $a=0$ 时, $f(x)=\frac{1}{x}$, 对应图象是 B 选项. 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 是对勾函数, 对应图象是 D 选项. 当 $a<0$ 时, $g(x)=ax$ 和 $h(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上都单调递减, 所以 $f(x)=g(x)+h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上单调递减, 对应图象是 C 选项. 所以不可能的是 A 选项. 故选 A.

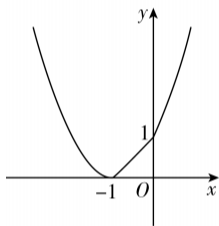
高手视角 根据解析式判断图象时常从定义域、特殊值、单调性、奇偶性(后续会学到)等方面入手.

5. B 【解析】不妨设 $x_1>x_2$, 因为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>1$, 所以 $f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2$, 所以 $f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2$. 设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x_1)>g(x_2)$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $f(2)=2$, 所以 $g(2)=f(2)-2=0$, 所以 $g(x)=f(x)-x>0$ 的解集为 $(2, +\infty)$, 所以 $f(x)>x$ 的解集为 $(2, +\infty)$. 故选 B.

6. ACD 【解析】由 $(x+1)^2\geq x+1$ 得 $x(x+1)\geq 0$, 解得 $x\leq -1$ 或 $x\geq 0$, 由 $(x+1)^2<x+1$ 得 $x(x+1)<0$, 解得 $-1<x<0$.

$$\text{所以 } f(x) = (x+1)^2 \oplus (x+1) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 0, \\ x+1, & -1 < x < 0, \end{cases}$$

作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



对于 A 选项, 易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, A 正确.

对于 B 选项, 由图可知, $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, B 错误.

对于 C 选项, 由图可知, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1]$, C 正确.

对于 D 选项, 当 $x\leq -1$ 或 $x\geq 0$ 时, 由 $f(x)=(x+1)^2>1$, 可得 $x^2+2x>0$, 解得 $x<-2$ 或 $x>0$.

当 $-1<x<0$ 时, $f(x)=x+1\in(0, 1)$, 此时, 不等式 $f(x)>1$ 无解.

综上所述, 不等式 $f(x)>1$ 的解集为 $\{x|x<-2 \text{ 或 } x>0\}$, D 正确.

故选 ACD.

7. ABD 【解析】对于 A 项, 由 $f\left(\frac{x}{y}\right)=yf(x)-xf(y)$, 取 $x=y=1$, 得 $f(1)=f(1)-f(1)=0$, 故 A 正确;

对于 B 项, 由 $f\left(\frac{x}{y}\right)=yf(x)-xf(y)$, 取 $x=1$, 因为 $f(1)=0$,

所以 $f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$, 即 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$, 当 $0<x<1$ 时, $\frac{1}{x}>$

1, 则 $f\left(\frac{1}{x}\right)>0$, 故 $-f(x)>0$, 即 $f(x)<0$, 故 B 正确;

对于 C 项, 由 $f\left(\frac{x}{y}\right)=yf(x)-xf(y)$, 取 $x=y^2$, 可得 $f(y)=$

$$yf(y^2)-y^2f(y), \text{ 整理得 } f(y^2)=\left(y+\frac{1}{y}\right)f(y),$$

又 $y>0$, 则 $y+\frac{1}{y}\geq 2$, 当且仅当 $y=1$ 时取等号, 但 $f(y)$ 的值可正、可负、可为零, 故不一定有 $f(y^2)\geq 2f(y)$, 即 $f(x^2)\geq 2f(x)$ 不一定成立, 故 C 错误;

对于 D 项, 任取 $x_1>x_2>1$, 则 $\frac{x_1}{x_2}>1$, 依题意, $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)>0$, 而

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=x_2f(x_1)-x_1f(x_2),$$

$$\text{则 } x_2f(x_1)-x_1f(x_2)>0, \text{ 即 } \frac{f(x_1)}{x_1}>\frac{f(x_2)}{x_2}, \text{ 令 } g(x)=\frac{f(x)}{x},$$

则 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数.

于是, 对于 $f(x)=xg(x)$, 任取 $x_1>x_2>1$, 因为 $g(x_1)>g(x_2)>0$, 所以 $x_1g(x_1)>x_2g(x_2)$, 即 $f(x_1)>f(x_2)$, 即函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 正确.

故选 ABD.

8. 2 026 【解析】依题意, 令 $f(x)-x=t$, 则 $f(t)=2$, 由函数 $f(x)$ 在定义域 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 得 $t\geq 0$, 且 t 为常数, 则 $f(x)=x+t$, 则 $f(t)=2t=2$, 解得 $t=1$, 因此 $f(x)=x+1$, 所以 $f(2\ 025)=2\ 026$.

9. $(1, +\infty)$ 【解析】任取 $x_1<x_2$, 从而 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1$,

因为 $x_2-x_1>0$, 所以 $f(x_2-x_1)>1$,

所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

不等式 $f(x)+f(4-3x)<6$ 等价于不等式 $f(x)+f(4-3x)-1<5$, 即 $f(x+4-3x)<f(2)$.

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $4-2x<2$, 解得 $x>1$.

10. 【解】(1) 由函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ 可得, $f(2)=2^2+\frac{a}{2}=4+\frac{a}{2}$.

(2) 取任意 $x_1, x_2\in(1, +\infty)$, 且 $x_1>x_2$,

$$\text{则 } f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{a}{x_1}-\left(x_2^2+\frac{a}{x_2}\right)$$

$$=x_1^2-x_2^2+\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}$$

$$=(x_1-x_2)\cdot\frac{(x_1+x_2)x_1x_2-a}{x_1x_2},$$

因为函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$.

因为 $x_1>x_2>1$, 所以 $x_1-x_2>0, x_1x_2>0$,

所以 $(x_1+x_2)x_1x_2-a>0$,

即当 $x_1>x_2>1$ 时, $a<(x_1+x_2)x_1x_2$ 恒成立.

又 $x_1+x_2>2, x_1x_2>1$,

所以 $(x_1+x_2)x_1x_2>2$,

所以要使 $a<(x_1+x_2)x_1x_2$ 恒成立, 则 $a\leq 2$.

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

(3) 由 (1) 可知 $f(2) = 4 + \frac{a}{2}$,

所以不等式 $f\left(\frac{2ax}{x-2}\right) > 4 + \frac{a}{2}$ 可化为 $f\left(\frac{2ax}{x-2}\right) > f(2)$.

由函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, 可得 $\frac{2ax}{x-2} > 1$.

当 $a=0$ 时 $f\left(\frac{2ax}{x-2}\right)$ 无意义, 故原不等式的解集为 $\emptyset$.

当 $0 < a < 1$ 时, 由 (2) 知 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\frac{2ax}{x-2} > 2$.

由 $0 < a < 1$, 可得 $-1 < a-1 < 0$, 则 $0 < 1-a < 1$, 则 $\frac{2}{1-a} > 2$,

则不等式 $\frac{2ax}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \frac{2[(a-1)x+2]}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{2}{1-a}}{x-2} < 0 \Leftrightarrow 2 < x < \frac{2}{1-a}$,

故原不等式的解集为 $\left(2, \frac{2}{1-a}\right)$.

综上所述, 当 $a=0$ 时, 原不等式的解集为 $\emptyset$;

当 $0 < a < 1$ 时, 原不等式的解集为 $\left(2, \frac{2}{1-a}\right)$.

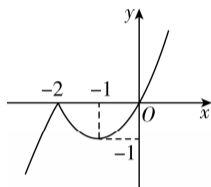
易错专刷

易错点 1 函数有多个相同的单调区间时要注意写法

11. $(-\infty, -2), (-1, +\infty)$ 【解析】 $f(x) = x|x+2| = \begin{cases} x(x+2), & x \geq -2, \\ -x(x+2), & x < -2, \end{cases}$

【重点】含绝对值的函数常转化为分段函数求解

作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示, 函数 $f(x) = x|x+2|$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2), (-1, +\infty)$.



易错警示

对某一函数 $y=f(x)$, 它在区间 (a, b) 与 (c, d) 上都单调递增(减), 不能说 $y=f(x)$ 在 $(a, b) \cup (c, d)$ 上一定单调递增(减), 各个区间之间只能用“,”或“和”连接, 而不能用“ $\cup$ ”或“或”连接.

易错点 2 忽视函数的定义域

12. C 【解析】令 $y=1$, 则 $f(x) = f(x) + f(1) - 1$, 得 $f(1) = 1$, 所以由 $f(x-1) > 1$ 得 $f(x-1) > f(1)$. 又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递减, 所以 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 < 1, \end{cases}$ 解得 $1 < x < 2$. 故选 C.

易错警示

若函数的定义域不是全体实数, 则应用函数单调性求解不等式时, 不要忘记函数定义域的限制.

13. $[-1, 1)$ 【解析】令 $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$, 解得 $-1 \leq x \leq 3$, 故函数的定义域为 $[-1, 3]$.

令 $u = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$,

故 $u = -(x-1)^2 + 4$ 在 $[-1, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3]$ 上单调递减,

又 $y = \sqrt{u}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

由复合函数的单调性可知, $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ 的单调递增区间为 $[-1, 1)$.

易错警示

求解复合函数的单调性问题一定要注意函数的定义域. 求解本题的易错之处, 一是忽视函数的定义域, 二是不能正确理解复合函数的单调性的判断法则.

易错点 3 不能正确理解“单调区间”和“在区间上单调”这两个概念

14. (1) -3 (2) $(-\infty, -3]$ 【解析】(1) 因为函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, 4]$, 且函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = 1-a$, 所以 $1-a = 4$, 即 $a = -3$.

(2) 因为函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 且函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = 1-a$, 所以 $1-a \geq 4$, 即 $a \leq -3$.

易错警示

“函数的单调区间”与“函数在某区间上单调”不是一个概念, 说函数的单调区间是 I , 指的是函数单调区间的最大范围为区间 I . 而函数在某一区间上单调, 则指此区间是相应单调区间的子区间.

易错点 4 忽视分段函数定义域的分界点而致误

15. D 【解析】因为函数 $f(x) = \begin{cases} (a-1)x + a - 4, & x > 1, \\ -x^2 + (6-a)x, & x \leq 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的

增函数, 所以 $\begin{cases} a-1 > 0, \\ \frac{6-a}{2} \geq 1, \\ (a-1) \cdot 1 + a - 4 \geq -1 + (6-a) \cdot 1, \end{cases}$ 解得 $\frac{10}{3} \leq$

【防区】研究分段函数单调性时不要遗漏函数分界点的讨论

$a \leq 4$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{10}{3}, 4\right]$. 故选 D.

易错警示

对于分段函数在定义域上单调递增(减)的问题, 除了保证在定义域的每一个区间上单调性相同之外, 还要考虑在分界点处的函数值的大小关系, 若函数是增函数, 则分界点处的函数值左边不大于右边; 若函数是减函数, 则分界点处的函数值右边不大于左边, 否则求出的参数范围会出现错误.

课时 2 函数的最大(小)值

基础必刷

1. D 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的减函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有最大值 $f(a)$, $f(x) + c$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $f(a) +$

$c, f(x)-c$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 $f(a)-c, cf(x)$ ($c < 0$) 在 $[a, b]$ 上有最小值 $cf(a)$, 故选 D.

2. B 【解析】 $y = \frac{3x^2+5}{x^2-2} = 3 + \frac{11}{x^2-2}, x \in [-4, -2]$,

当 $x \in [-4, -2]$ 时, $x^2 \in (4, 16]$, 则 $x^2-2 \in (2, 14]$, $\frac{11}{x^2-2} \in$

$\left[\frac{11}{14}, \frac{11}{2}\right)$, 则 $3 + \frac{11}{x^2-2} \in \left[\frac{53}{14}, \frac{17}{2}\right)$. 故选 B.

3. B 【解析】 $y = x+4$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 对应值域为 $(a+4, +\infty)$.

当 $a \leq -2$ 时, $y = (x+2)^2$ 在 $(-\infty, a]$ 上单调递减, 对应值域为 $[(a+2)^2, +\infty)$,

而 $(a+2)^2 - (a+4) = a^2 + 3a = a(a+3)$,

若 $a(a+3) > 0$, 则 $a < -3$ ($a > 0$ 舍去), 此时 $(a+2)^2 > a+4$, $f(x)$ 不存在最小值;

若 $a(a+3) \leq 0$, 则 $-3 \leq a \leq 0$, 即 $-3 \leq a \leq -2$, 此时 $(a+2)^2 \leq a+4$, 则 $f(x)$ 的最小值为 $(a+2)^2$.

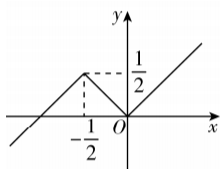
当 $a > -2$ 时, $y = (x+2)^2$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, a]$ 上单调递增, 对应值域为 $[0, +\infty)$, 此时 $a+4 > 2 > 0$, 则 $f(x)$ 的最小值为 0.

综上, $a \geq -3$, 故 a 的最小值为 -3. 故选 B.

高手视角 分段函数的最小值是每段最小值中的最小者, 若含参数, 则需分类讨论.

4. BC 【解析】作出函数 $m(x) = \min\{|x|, x+1\}$ 的图象, 如图:

🔗 **重点:** 已知分段函数求最值时可简略画出图象辅助分析



对于 A: 由图可得, $m(x)$ 无最大值, 无最小值, 故 A 错误; 对

于 B: 由图可得, $m(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}$, 故 B

正确; 对于 C: 由 $|x| \leq \frac{1}{2}$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, 由图可得, 不

等式 $m(x) \leq \frac{1}{2}$ 的解集为 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, 故 C 正确; 对于 D: 由

图可得, $m(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right], [0, +\infty)$, 故

D 错误. 故选 BC.

5. ACD 【解析】 $f(x) = \frac{4x+3}{x-1} = \frac{4(x-1)+7}{x-1} = 4 + \frac{7}{x-1}$, 定义域为

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$,

借助反比例函数的单调性易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ 上都单调递减.

对于 A: $f(x)$ 在 $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ 上没有最大值, 也没有最小值, A 正确;

对于 B: 当 $x \geq 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 B 错误;

对于 C: 当 $x \leq -6$ 时, $f(x)$ 单调递减且 $f(-6) = 3$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{7}{x-1} \rightarrow 0$, 且小于 0, 所以当 $x \leq -6$ 时, $f(x)$ 的值

域为 $[3, 4)$, 故 C 正确;

对于 D, 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, $f(0) = -3$, 当 $x \rightarrow 1$ 且

$x < 1$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \rightarrow 1$ 且 $x > 1$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 4$, 故 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -3] \cup (4, +\infty)$, 故 D 正确. 故选 ACD.

6. $\sqrt{6}$ 【解析】要使函数有意义, 则 $\begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0, \\ x^2+x-6 \geq 0, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1, \\ x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -3, \end{cases}$ 故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq$

$-3\}$. 由于函数 $y = \sqrt{x^2-2x-3}$, $y = \sqrt{x^2+x-6}$ 都在区间 $(-\infty, -3]$ 上单调递减, 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(-3)$ 或 $f(3)$. 因为 $f(-3) = 2\sqrt{3}$, $f(3) = \sqrt{6}$, $2\sqrt{3} > \sqrt{6}$, 所以函数 $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3} + \sqrt{x^2+x-6}$ 的最小值为 $\sqrt{6}$.

7. 5 【解析】由 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 5$, 可得 $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{11}{2}$, 所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = 1$.

当 $-1 < m \leq 3$ 时, $f(x)_{\max} = f(-1) = \frac{1}{2} \times (-1)^2 - (-1) - 5 = -\frac{7}{2}$,

🔗 **逻辑:** $x = -1$ 和 $x = 3$ 关于对称轴直线 $x = 1$ 对称, 根据 $x = -1$ 和 $x = m$ 与对称轴的距离分类讨论

又函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 5$ 在 $[-1, m]$ 上的最大值为 $\frac{1}{2}m$, 所

以 $-\frac{7}{2} = \frac{1}{2}m$, 解得 $m = -7$ (舍去);

当 $m > 3$ 时, $f(x)_{\max} = f(m) = \frac{1}{2}m^2 - m - 5$, 所以 $\frac{1}{2}m^2 - m - 5 =$

$\frac{1}{2}m$, 所以 $m^2 - 3m - 10 = 0$, 所以 $(m-5)(m+2) = 0$, 解得 $m = 5$

或 $m = -2$ (舍去). 综上, $m = 5$.

8. 【解】 (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x^2-2x, & x \geq 2, \\ -x^2+2x, & x < 2, \end{cases}$

当 $x < 2$ 时, $f(x) = -x^2+2x \geq x$, 解得 $0 \leq x \leq 1$;

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x^2-2x \geq x$, 解得 $x \geq 3$.

综上, 使 $f(x) \geq x$ 成立的 x 的集合为 $[0, 1] \cup [3, +\infty)$.

(2) 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = x|x-a| = |x^2-ax|$,

(i) 当 $f(1) = |1-a| = 2$ 时, $a = -1$ 或 $a = 3$,

当 $a = -1$ 时, $f(x) = |x^2 + x|$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = 6$, 不符合题意, 舍去;

当 $a = 3$ 时, $f(x) = |x^2 - 3x|$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}, \text{不符合题意, 舍去.}$$

(ii) 当 $f(2) = |4 - 2a| = 2$ 时, $a = 1$ 或 $a = 3$ (舍),

当 $a = 1$ 时, $f(x) = |x^2 - x|$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = 2$, 符合题意.

(iii) 当 $f\left(\frac{a}{2}\right) = \left|\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right| = \left|\frac{a^2}{4}\right| = 2$, 且 $\frac{a}{2} \in [1, 2]$, 解得

$a = 2\sqrt{2}$, 此时 $f(x) = |x^2 - 2\sqrt{2}x|$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(\sqrt{2}) = 2$, 符合题意.

综上所述, $a = 1$ 或 $2\sqrt{2}$.

(3) ① 当 $a \leq 1$ 时, 在区间 $[1, 2]$ 上,

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}, \text{又 } y = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \text{ 的图象是开}$$

口向上的抛物线, 对称轴是直线 $x = \frac{a}{2}$,

$$\because a \leq 1, \therefore \frac{a}{2} \leq \frac{1}{2} < 1, \therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1 - a.$$

② 当 $1 < a < 2$ 时, 在区间 $[1, 2]$ 上, $f(x) = x|x - a| \geq 0$, $f(x)_{\min} = 0$.

③ 当 $a \geq 2$ 时, 在区间 $[1, 2]$ 上,

$$f(x) = -x^2 + ax = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}, \text{又 } y = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \text{ 的图象}$$

是开口向下的抛物线, 对称轴是直线 $x = \frac{a}{2}$,

$$1^\circ \text{ 当 } 1 \leq \frac{a}{2} < \frac{3}{2}, \text{ 即 } 2 \leq a < 3 \text{ 时, } f(x)_{\min} = f(2) = 2a - 4.$$

$$2^\circ \text{ 当 } \frac{a}{2} \geq \frac{3}{2}, \text{ 即 } a \geq 3 \text{ 时, } f(x)_{\min} = f(1) = a - 1.$$

$$\therefore f(x)_{\min} = \begin{cases} 1 - a, & a \leq 1, \\ 0, & 1 < a < 2, \\ 2a - 4, & 2 \leq a < 3, \\ a - 1, & a \geq 3. \end{cases}$$

易错专刷

易错点 1 不能正确理解函数最值概念而致误

9. D 【解析】根据函数最小值的概念可知, 此函数的最小值不能确定. 故选 D.

10. A 【解析】 $f(x)$ 的值域为 $[a, b]$, 即最小的函数值为 $f(x)_{\min} = a$, 最大的函数值为 $f(x)_{\max} = b$, 故 A 正确. $f(x)_{\min} = a, f(x)_{\max} = b$, 区间 $[a, b]$ 上的某些元素可能不是函数值, 因而 $[a, b]$ 不一定是值域, 故 B 错误. 若 $f(x)_{\min} = a$, 由函数最小值的定义可知一定存在 x_0 使 $f(x_0) = a$, 即 $f(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 一定有交点, 但不一定仅有一个交点, 故 C, D 都错

误. 故选 A.

易错警示

理解函数的最值必须明确函数最大(小)值一定是值域的元素.

易错点 2 含参数的一次函数、二次函数最值问题忽视分类讨论致误

11. C 【解析】当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = 2a + 1$, 最小值为 $f(1) = a + 1$, $\therefore (2a + 1) - (a + 1) = 2$, 解得 $a = 2$.

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(1) = a + 1$, 最小值为 $f(2) = 2a + 1$, $\therefore (a + 1) - (2a + 1) = 2$, 解得 $a = -2$.

综上所述, $a = 2$ 或 $a = -2$. 故选 C.

易错警示

涉及函数 $f(x) = kx + b$ ($k \neq 0$) 的单调性或最值时, 若 k 的值符号不确定, 则必须对 k 进行分类讨论, 本题的易错之处是忽视对一次项系数的讨论, 而认为函数是增函数或减函数中的一种而造成错解.

12. -2 或 -4 【解析】二次函数 $f(x) = x^2 + ax$ 的图象的对称轴为直线 $x = -\frac{a}{2}$.

当 $-\frac{a}{2} \leq 0$, 即 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递增,

所以 $M = f(3) = 9 + 3a, m = f(0) = 0$, 由 $M - m = 4$, 得 $9 + 3a - 0 = 4 \Rightarrow a = -\frac{5}{3}$, 不满足 $a \geq 0$, 舍去.

当 $-\frac{a}{2} \geq 3$, 即 $a \leq -6$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上单调递减,

所以 $M = f(0) = 0, m = f(3) = 9 + 3a$, 由 $M - m = 4$, 得 $0 - (9 + 3a) = 4 \Rightarrow a = -\frac{13}{3}$, 不满足 $a \leq -6$, 舍去.

当 $0 < -\frac{a}{2} < 3$, 即 $-6 < a < 0$ 时, $m = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

若 $0 < -\frac{a}{2} \leq \frac{3}{2}$, 即 $-3 \leq a < 0$, 则 $M = f(3) = 9 + 3a$,

由 $M - m = 4$, 得 $9 + 3a + \frac{a^2}{4} = 4 \Rightarrow a = -2$ 或 $a = -10$ (舍去).

若 $\frac{3}{2} < -\frac{a}{2} < 3$, 即 $-6 < a < -3$, 则 $M = f(0) = 0$,

由 $M - m = 4$, 得 $\frac{a^2}{4} = 4 \Rightarrow a = -4$ 或 $a = 4$ (舍去).

综上所述, $a = -2$ 或 $a = -4$.

易错警示

求解含参数的二次函数在给定区间的最值问题, 应按照二次函数图象的对称轴与区间的相对位置关系分类讨论后求其最值. 对于解析式含绝对值的函数问题, 应先去掉绝对值符号, 化简函数解析式, 转化为二次函数等函数在给定区间的最值问题, 分类讨论求解.

13. 【解】(1) 因为二次函数 $y=f(x)$ 满足 $f(0)=f(8)=0$, 且 $f(4)=16$,
所以函数图象的对称轴为直线 $x=4$, 且 $f(x)$ 的最大值为 16,
可设函数 $f(x)=a(x-4)^2+16$, $a<0$, 根据 $f(0)=16a+16=0$, 解得 $a=-1$,

$$\text{故 } f(x)=-(x-4)^2+16=-x^2+8x.$$

(2) 函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=4$, 要使函数在区间 $[t, t+2]$ 上不单调, 则 $4 \in (t, t+2)$,

即 $t < 4 < t+2$, 得 $\begin{cases} t < 4, \\ t+2 > 4, \end{cases}$ 解得 $2 < t < 4$, 所以 t 的取值范围

为 $(2, 4)$.

(3) 由(1)知, 函数图象的对称轴为直线 $x=4$, 且抛物线开口向下,

当 $t \geq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递减, 此时最大值 $h(t)=f(t)=-t^2+8t$;

当 $t+2 \leq 4$, 即 $t \leq 2$ 时, 函数 $y=f(x)$ 在 $[t, t+2]$ 上单调递增, 此时最大值 $h(t)=f(t+2)=-t^2+4t+12$;

当 $t < 4 < t+2$, 即 $2 < t < 4$ 时, 函数 $y=f(x)$ 在 $[t, 4]$ 上单调递增, 在 $[4, t+2]$ 上单调递减, 此时最大值 $h(t)=f(4)=16$.

$$\text{综上, } h(t)=\begin{cases} -t^2+4t+12, & t \leq 2, \\ 16, & 2 < t < 4, \\ -t^2+8t, & t \geq 4. \end{cases}$$

易错警示 求解二次函数在动区间上的最值, 应按照动区间与二次函数图象的对称轴的相对位置关系分类讨论后求其最值.

3.2.2 奇偶性

基础必刷

1. C 【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 又函数 $f(x)$ 在 $[2, 8]$ 上单调递减, 且最小值为 -5 , 于是 $f(x)$ 在 $[-8, -2]$ 上单调递减, 且最大值为 5. 故选 C.

2. A 【解析】函数 $f(x)=ax^3+bx-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 令 $g(x)=f(x)+1=ax^3+bx$, 则 $g(-x)=a(-x)^3+b(-x)=-g(x)$, 所以函数 $g(x)$ 是奇函数, 因此 $g(2\ 025)+g(-2\ 025)=f(2\ 025)+1+f(-2\ 025)+1=0$, 而 $f(2\ 025)=5$, 所以 $f(-2\ 025)=-7$. 故选 A.

3. C 【解析】对于 A, 函数定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x)=-(-x)^3=x^3=-f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数, 但 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 A 错误;

对于 B, 函数定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 关于原点对称, $f(-x)=-\frac{1}{|x|}=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为偶函数, 故 B 错误;

对于 C, 函数定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x)=-x|-x|=-x|x|=-f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2$, 函数在 $(0, +\infty)$

上单调递增, 故 C 正确;

对于 D, 函数定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 关于原点对称, $f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 由对勾函数的性质可得函数在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 错误.
故选 C.

4. C 【解析】因为 $f(x)=x^2+bx+c$, 若 $f(1)=f(-1)$, 即 $1+b+c=1-b+c$, 可得 $b=0$, 此时 $f(x)=x^2+c$, 则 $f(x)=f(-x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数, 所以“ $f(1)=f(-1)$ ” $\Rightarrow$ “ $f(x)$ 为偶函数”; 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 由偶函数的性质可知 $f(-1)=f(1)$, 所以“ $f(1)=f(-1)$ ” $\Leftarrow$ “ $f(x)$ 为偶函数”, 因此“ $f(1)=f(-1)$ ”是“ $f(x)$ 为偶函数”的充要条件. 故选 C.

5. C 【解析】因为 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 所以 $f(-m)=-f(m)$, 其中 $f(-m)=(-m+m-3) \cdot [(-m)^2-m+2]$, $f(m)=(m+m-3)(m^2-m+2)$, 则 $-3(m^2-m+2)=-(2m-3)(m^2-m+2)$, 由于 $m^2-m+2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ 恒成立, 故 $2m-3=3$, 解得 $m=3$, 则 $f(x)=x(x^2-1)$, 是奇函数, 符合题意,

⚡ **防误区:** 在不确定 m^2-m+2 是否为 0 的情况下不可随意约分
则 $f(m)=f(3)=3 \times (9-1)=24$. 故选 C.

6. D 【解析】函数 $f(x)=-\frac{4x}{4x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 定义域关于原点对称, 且 $f(-x)=-\frac{4(-x)}{4(-x)^2+1}=f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 选项 A, C 错误;
又 $f(1)=-\frac{4}{5}<0$, 所以选项 B 错误. 选项 D 满足以上特征. 故选 D.

7. ABD 【解析】对于 A, 因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)$ 是奇函数, 所以 $f(x+1)=-f(-x+1)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 故 A 正确; 对于 B, 因为对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 故 B 正确; 对于 C, 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $f(-1)<f(1)=0$, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $\frac{0+2}{2}=1$, $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 所以 $f(0)+f(2)=0$, 故 D 正确. 故选 ABD.

8. ABC 【解析】函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $f(x)=f(-x)$, 又当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=-x^2-2x$,
所以当 $x>0$ 时, $-x<0$, 则 $f(x)=f(-x)=-(-x)^2-2(-x)=-x^2+2x$, 故 D 错误;
当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=-x^2-2x$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递

增,在 $(-1,0)$ 上单调递减,此时 $f(x)_{\max}=f(-1)=1$,由于偶函数的图象关于 y 轴对称,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,此时 $f(x)_{\max}=f(1)=f(-1)=1$,故 $f(x)$ 的最大值为1,故A正确,B正确;

当 $x \leq 0$ 时,令 $f(x) = -x^2 - 2x \geq 0$,解得 $-2 \leq x \leq 0$,当 $x > 0$ 时,令 $f(x) = -x^2 + 2x \geq 0$,解得 $0 < x \leq 2$,所以 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2,2]$,故C正确. 故选ABC.

9. -2 【解析】因为函数 $f(x)$ 是奇函数,函数 $g(x)$ 是偶函数,且 $f(x)+g(x)=x^2-x+1$ ①,

所以 $f(-x)+g(-x)=(-x)^2-(-x)+1$,即 $-f(x)+g(x)=x^2+x+1$ ②,联立①②得 $f(x)=-x$, $g(x)=x^2+1$,故 $f(2)=-2$.

10. $-2x^2+4$ 【解析】 $\because$ 函数 $f(x)=(x+a)(bx+2a)=bx^2+(2a+ab)x+2a^2$ 是偶函数, $\therefore 2a+ab=0$,即 $a(b+2)=0$, $\therefore a=0$ 或 $b=-2$. 又函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,4]$, $\therefore b < 0$,且 $2a^2=4$,即 $a^2=2$, $b=-2$. $\therefore$ 该函数的解析式为 $f(x)=-2x^2+4$.

11. 【解】(1) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,且 $x_1 < x_2$,则 $x_2 - x_1 > 0$,

因为当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$,所以 $f(x_2 - x_1) < 0$,

则 $f(x_2) - f(x_1) = f((x_2 - x_1) + x_1) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) < 0$,

即 $f(x_1) > f(x_2)$,故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(2)令 $x=y=0$,得 $f(0+0)=f(0)+f(0)$,所以 $f(0)=0$.

令 $y=-x$,得 $f(x-x)=f(x)+f(-x)=f(0)=0$,

所以 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

因为 $f(4)=-2$,所以 $f(4)=2f(2)=-2$,所以 $f(2)=-1$,

所以 $f(-2)=-f(2)=1$.

因为 $f(x^2-2x) > f(2-x)+1=f(2-x)+f(-2)=f(-x)$,所以 $f(x^2-2x) > f(-x)$,

又由(1)知, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,所以 $x^2-2x < -x$,

即 $x^2-x < 0$,即 $0 < x < 1$,

所以不等式 $f(x^2-2x) > f(2-x)+1$ 的解集为 $(0,1)$.

高手视角 (1)根据函数的单调性的定义进行判断并证明即可.(2)利用赋值法和函数的奇偶性求出 $f(-2)=1$,再根据已知等式,结合函数的单调性及一元二次不等式的解法进行求解即可.

易错专刷

易错点1 判断函数的奇偶性时忽视定义域致误

12. D 【解析】函数 $f(x)=(x+2)\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$ 的定义域满足 $\frac{2-x}{x+2} \geq 0$,解得 $-2 < x \leq 2$,即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2]$,定义域不关于原点对称,因此函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

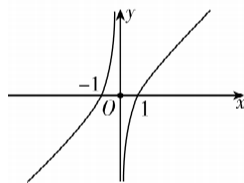
易错警示

求解本题的易错之处是忽略函数的定义域,将

函数化简变形为 $f(x)=(x+2)\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}=\sqrt{(x+2)^2 \cdot \frac{2-x}{x+2}}=\sqrt{4-x^2}$,从而判断出该函数是偶函数. 因此在判断函数的奇偶性时,化简函数解析式一定要等价变形,不能扩大或缩小函数的定义域.

易错点2 求解与奇、偶函数有关的不等式时未进行等价转化致误

13. A 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $f(-1)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增, $f(-1)=-f(1)=0$, $f(0)=0$,作出 $f(x)$ 图象的草图如图所示.



由图象知, $f(2x-1) > 0$ 等价于 $-1 < 2x-1 < 0$ 或 $2x-1 > 1$,解得

$0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$,所以不等式 $f(2x-1) > 0$ 的解集为

$(0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$. 故选A.

易错警示

求解与奇、偶函数有关的不等式问题,要考虑奇、偶函数关于原点对称的定义域两侧图象的单调性. 本题的易错之处是只考虑 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的性质,而忽视 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也单调递增,造成错解. 为避免此类问题的发生,可根据函数的奇偶性、单调性作出函数的草图,根据图象将不等式转化,脱去“ f ”,解出即可.

3.3 幂函数

基础必刷

1. B 【解析】对于A, $y=2x$ 不是幂函数,故不符合要求;

对于B, $y=x^2$ 是幂函数,且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,符合要求;

对于C, $y=\sqrt{2x}=\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}$ 中 $x^{\frac{1}{2}}$ 的系数不为1,故 $y=\sqrt{2x}$ 不是幂函数,不符合要求;

对于D, $y=\frac{2}{x}=2x^{-1}$ 中 x^{-1} 的系数不为1,故 $y=\frac{2}{x}$ 不是幂函数,不符合要求. 故选B.

2. D 【解析】由题意得 $m^2-5m+5=1$,解得 $m=1$ 或 $m=4$.

重点: 可利用 x^a 的系数为1求解参数

当 $m=1$ 时, $f(x)=x^2$,是偶函数,不符合题意;当 $m=4$ 时, $f(x)=x^5$,是奇函数,符合题意. 故选D.

3. A 【解析】当 $x > 1$ 时,幂函数 $y=x^a$ 的图象自上而下所对应